О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ (СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ ВО ВРЕМЕНИ) ДОЛГОСРОЧНЫХ РЕШЕНИЙ В МНОГОАГЕНТНЫХ СИСТЕМАХ

Л.А. ПЕТРОСЯН

Ученый совет СПбГУ
28.11.2016

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

- Для оценки качества принятия решений и выработки методологии их оптимизации используются методы математического и компьютерного моделирования.

- В том случае, когда управленческие решения принимаются одним лицом и их результат не зависит от действий других сторон, в качестве аппарата математического моделирования может быть с успехом использована теория оптимального управления и оптимизации. В то же время в подавляющем большинстве случаев даже, когда можно условно предположить что принятие решений осуществляется одним лицом, нельзя гарантировать что его результат не будет зависеть от действий других сторон или лиц так или иначе заинтересованных в результатах этого решения.

- В этом случае необходимо учитывать наличие несовпадающих, а в ряде случаев и конфликтующих интересов у сторон, заинтересованных в результатах.

- Поэтому при попытках моделирования подобных ситуаций пользуются методами и подходами теории игр. Однако подавляющее большинство исследований в области теории игр касается, так называемых, однократных или мгновенных игр, в которых конфликт между сторонами происходит мгновенно и таким образом совершенно не учитывается временной фактор.

- В то же время совершенно очевидно, что реальные процессы принятия решений происходят на достаточно большом временном интервале, где приходится в каждый текущий момент времени учитывать результаты предыдущих решений и только на этой основе вырабатывать соответствующее управление.

- Именно поэтому приходится констатировать, что подходящими математическими моделями подобных процессов могут быть динамические и дифференциальные игры, которые с одной стороны учитывают конфликтность процесса принятия решений, а с другой необходимость его моделирования на достаточно продолжительном временном интервале.

- На практике долгосрочные управленческие решения вырабатываются на основе рекомендаций и потребностей, выявляемых на всех уровнях системы управления, в результате из большого числа возможных вариантов, на основе некоторого трудно формализуемого алгоритма, выбирается одно единственное решение, подлежащее дальнейшей реализации. Этот плохо формализуемый и трудно улавливаемый алгоритм выбора по существу является реализацией установившегося в данной системе принципа оптимальности.
- Этот неуловимый принцип оптимальности, лежащий в основе выбора решения, имеет теоретико-игровой, конфликтный характер, поскольку также как и в теоретико-игровых моделях, здесь мы имеем несколько сторон, влияющих на принятие решения, в соответствии со своими не обязательно совпадающими интересами.
- Прогресс в технологиях, коммуникациях, промышленной организации, международной торговле, экономической интеграции и политических реформах способствовал созданию быстро развивающихся социально-экономических связей включающих межрегиональную и межгосударственную деятельность, а также взаимодействие задействованных объектов и субъектов.

- Стратегический аспект принятия решений особенно важен в таких областях как торговые переговоры, иностранные и национальные капиталовложения, международный контроль состояния окружающей средой, интеграция и развитие рынков, технологические и продуктовые исследования и разработки, маркетинг, региональная кооперация, политика в области обороны и контроль над вооружениями.

- Теория игр существенно подняла наш уровень понимания процессов принятия решений. Однако усложнение социально-экономических и политических проблем требует нахождения новых аналитических методов и методологических подходов, как в самой теории, так и при исследовании отдельных задач и в приложениях. Социальные науки, экономика и финансы и есть те области, в которых использование методологии теории игр может дать значительную отдачу именно из-за конфликтного характера возникающих здесь проблем. Исследования следует направить на более реалистический и релевантный анализ процессов принятия решений в социально-экономической сфере, при этом теоретико-игровой подход поможет особенно эффективно исследовать и решать задачи и проблемы.

- Теория дифференциальных игр возникла в пятидесятые годы прошлого века. Основополагающей работой в этой области считается монография **Р.Айзекса "Дифференциальные игры"**, вышедшая в свет в **1965г. ([Isaacs, 1965]).**

- Первые отечественные работы появились в **1965г. ([Красовский, 1966; Петросян, 1965; Понтрягин, 1967]).** Однако до середины шестидесятых годов исследовались лишь антагонистические дифференциальные игры, моделирующие конфликт между двумя сторонами, имеющими прямо противоположные интересы. Понятно, что антагонистические дифференциальные игры могли иметь приложения лишь в ограниченном классе задач, возникающих при военном столкновении сторон (перехват летательных аппаратов, обнаружение и уничтожение подводных подвижных объектов, оптимизация распределения ресурсов при локальных военных столкновениях и т.п.).

- Для моделирования социально-экономических процессов необходимо было разработать теорию неантагонистических дифференциальных игр. Первые работы в этой области появились в конце шестидесятых годов ([**Петросян, Мурзов**, 1967; **Case** 1967; **Starr**, **Ho**, 1969a, 1969b]). В этих работах исследовались неантагонистические некооперативные дифференциальные игры со многими участниками, и поэтому в качестве принципа оптимальности использовалось равновесие по **Нэшу**. В последующих работах полученные результаты применялись для исследования различных задач социально-экономического характера ([**Haurie, Krawczyk, Roche, 1976; Jorgensen, 1985; Jorgensen, Sorger, 1990; Jorgensen, Zaccour, 2002; Kaitala, 1993; Sorger, 1989; Yeung, 1992, 1994]** и др.).

- Однако в указанных работах не рассматривалась возможность кооперации участников конфликтно-управляемого процесса с целью достижения более высоких показателей. И хотя статическая (мгновенная) теория таких игр была хорошо развита, динамическому аспекту кооперативного поведения не было уделено должного внимания. Теория кооперативных игр дает возможность выработки социально-оптимальных коалиционно-эффективных решений в задачах, включающих стратегически обусловленные действия.

- Формализация условий кооперации и связанного с этим оптимального поведения участников конфликтно-управляемого процесса (игроков) является фундаментальным элементом этой теории. Однако для сохранения кооперации и принятых соглашений требуется выполнение более жесткого условия: в процессе реализации решения принцип оптимальности, на основе которого вырабатывалось первоначальное решение, должен оставаться состоятельным в течение всего игрового процесса (генерировать в определенном смысле адекватные решения в текущих подзадачах), т.е. в каждый момент времени вдоль определенной заранее оптимальной траектории процесса. Это условие носит название "**динамической устойчивости**" или "**состоятельности во времени**".

- Иными словами, свойство **динамической устойчивости решения (состоятельности во времени или временной состоятельности)** кооперативной динамической игры означает, что когда игра развивается вдоль кооперативной траектории, игроки следуют одному и тому же принципу оптимальности в каждый момент времени (в каждой подзадаче с начальными условиями на этой оптимальной траектории) и поэтому не имеют побуждения отклониться от первоначально выбранного оптимального решения в течение всей игры.

При исследовании кооперативных дифференциальных игр в конце 70-х годов нами было обнаружено и математически строго доказано, что если специальным образом не производить регуляризацию принципа оптимальности, то выбранное в начале процесса “оптимальное решение” в ходе его реализации почти всегда теряет свою “оптимальность” и поэтому не может оставаться основополагающим принципом дальнейшего развития. Данное явление имеет место даже без каких-либо внешних воздействий или изменения интереса участников. Это и есть нарушение динамической устойчивости или временной состоятельности. Несколько позже это обстоятельство было обнаружено при решении одной специальной задачи зарубежными авторами **Ф. Кидландом и Е. Прескоттом ([Kydland, Prescott, 1977])**, получившими Нобелевскую премию в области экономики в 2004 г.

Таким образом, чтобы долгосрочное экономическое (или любое другое) решение сохраняло свою оптимальность в процессе реализации, необходимо, чтобы заложенный при его выработке принцип оптимальности обладал свойством динамической устойчивости или временной состоятельности, хотя как нами строго доказано это может происходить лишь в вырожденных тривиальных случаях.

- Нарушение временной состоятельности рано или поздно приводит к ревизии стратегий развития, колоссальным материальным и моральным потерям.

- Однако при существующих схемах принятия решений сделать это практически невозможно. Поэтому мы наблюдаем вопиющие примеры потери временной состоятельности (расчет за строительство Асуанской плотины, война в Ираке, международные проекты по разработке российских нефтегазовых месторождений на основе соглашения о разделе продукции и др.).

- Динамическая устойчивость (временная состоятельность) принципов оптимальности в дифференциальных играх подробно исследовалась в работах специалистов по теории игр.

- **Л.А. Петросян ([Петросян, 1977])** математически формализовал понятие динамической устойчивости (временной состоятельности), ввел “понятие процедуры распределения дележа” для кооперативных решений **([Петросян, Данилов, 1979])**.

- В дальнейшем, в работах **[L. Petrosjan, 1993; L. Petrosjan, N. Zenkevich, 1996; 2016; L. Petrosyan, D.W.K. YEUNG, 2006; 2012]** проведен подробный анализ динамической устойчивости в кооперативных дифференциальных играх и предложен метод регуляризации для построения динамически устойчивых (состоятельных во времени) решений.

1. ПРОБЛЕМА ВРЕМЕННОЙ СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ КООПЕРАТИВНЫХ РЕШЕНИЙ

1.1. Динамическая устойчивость решения задачи оптимального управления.

Пусть точка $M \in R^n$ определяет некоторое идеальное состояние системы (в нашем примере – состояние совместного предприятия). Рассмотрим классическую задачу теории управления. Пусть задана управляемая система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x \in R^m, \quad u \in U \subset R^l \\ &x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, T], \end{aligned} \tag{1}$$

где вектор $x(t)$ описывает состояние системы, вектор $u(t)$ – управление, выбираемое в каждый момент времени t.

Процесс происходит на конечном интервале времени $[t_0, T]$. Целью управления является перевод точки x_0 (состояния системы в начальный момент времени t_0) в некоторое состояние $x(T)$ (в момент окончания процесса T), при котором достигается минимум расстояния $\rho(x(T), M)$ до некоторой фиксированной точки $M \in R^n$.

Построим множество $C(x_0, T - t_0)$, называемое множеством достижимости системы (1). Это множество тех точек $x(T)$, в которое может перейти система из x_0 в точности в момент времени T, в соответствии с некоторым выбранным правилом управления $u(t)$, $t \in [t_0, T]$. Понятно, что при различных правилах управления (управляющих функциях, или «программных стратегиях») $u(t)$ точки $x(T)$ будут различны.

Обозначим также нашу задачу минимизации расстояния $\rho(x(T),M)$ через $\Gamma(x_0,T-t_0)$, подчеркивая её зависимость от начального состояния x_0 и времени процесса $T-t_0$.

Предположим для простоты, что точка M не принадлежит $C(x_0,T-t_0)$, то есть что $M\cap C(x_0,T-t_0)=\varnothing$. Это означает, что достижение точки M за время $T-t_0$ из состояния x_0 невозможно. Принципом оптимальности в данной задаче является минимизация расстояния между точкой $x(T)$ и точкой M.

Очевидно, что «оптимальное движение» или «оптимальная траектория» должна переводить точку x_0 в точку M' ($x(t_0)=t_0, x(T)=M'$) наиболее близко расположенную в множестве $C(x_0,T-t_0)$ от точки M. Обозначим через $\overline{x}(t)$ траекторию, соединяющую x_0 с M', реализованную при каком-то фиксированном (оптимальном) программном управлении $\overline{u}(t)$, т.е.

$$\dot{\overline{x}}=f(\overline{x}(t),\overline{u}(t)),x(t_0)=x_0,x(T)=M'.$$

Пусть процесс развивается вдоль оптимальной траектории $\overline{x}(t)$, как это показано на рис. 1. Рассмотрим некоторый промежуточный момент $\tau \in [t_0, T]$ и пусть мы пожелали в этот момент проверить: будет ли точка M' оставаться ближайшей к M в подзадаче $\Gamma(\overline{x}(\tau), T-\tau)$ с начальным условием $\overline{x}(\tau)$ на оптимальной траектории и продолжительностью $T-\tau$? Совершенно очевидно, что ответ – положительный, то есть можно утверждать, что продолжение движения вдоль $\overline{x}(t)$ при $t \geq \tau$ будет оптимальным движением в подзадаче $\Gamma(\overline{x}(\tau), T-\tau)$ (рис. 1).

Это и означает динамическую устойчивость или временную состоятельность оптимальной траектории $\overline{x}(t)$. Этот принцип был впервые сформулирован **Р. Беллманом в 1957 г. ([Bellman, 1957])** и лёг в основу теории динамического программирования. Он практически всегда выполняется в однокритериальных классических задачах оптимального управления.

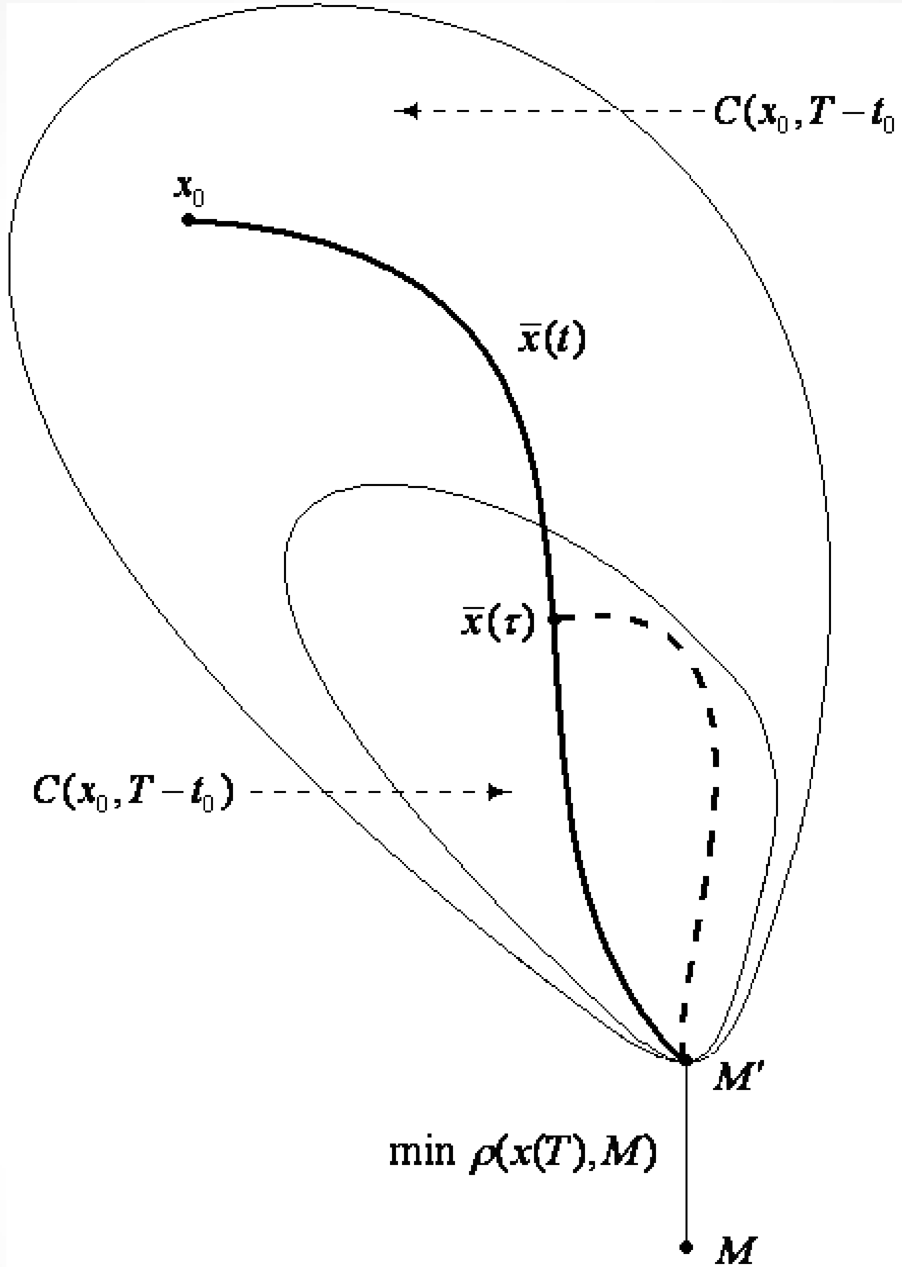


Рис. 1. Динамическая устойчивость оптимального управления

Заметим, что в рассматриваемом случае имеет место и более сильное условие *(кстати, незамеченное Р. Беллманом).* В задаче $\Gamma(\bar{x}(\tau), T-\tau)$ может возникнуть и другое программное управление $\tilde{u}(t),\ t \in [\tau, T),\ \tilde{u}(t) \neq \bar{u}(t)$ и соответствующая траектория $\tilde{x}(t)$, переводящая точку $\bar{x}(\tau)$ в M' и, следовательно, также оптимальное в подзадаче $\Gamma(\bar{x}(\tau), T-\tau)$. Интересно заметить, что управление вида

$$\bar{\bar{u}}(t) = \begin{cases} \bar{u}(t), & t \in [t_0, \tau) \\ \tilde{u}(t), & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

переводит точку x_0 в M' в задаче $\Gamma(x_0, T-t_0)$, то есть также является оптимальным в задаче $\Gamma(x_0, T-t_0)$.

Таким образом, оказывается, что любое оптимальное продолжение в подзадаче $\Gamma(\bar{x}(\tau), T-\tau)$ вместе с начальным оптимальным движением на отрезке $[t_0, \tau)$ в задаче $\Gamma(x_0, T-t_0)$ будет оптимальным в исходной задаче $\Gamma(x_0, T-t_0)$. Это свойство называется *сильной динамической устойчивостью управления.*

1.2. Нарушение сильной динамической устойчивости Парето оптимального решения в задаче многокритериального оптимального управления.

Пусть задана управляемая система дифференциальных уравнений (1):

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x \in R^m, \quad u \in U \subset R^l,$$
$$x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, T],$$

где, также как и в предыдущем случае, вектор $x(t)$ описывает состояние системы, вектор $u(t)$ – управление, выбираемое в каждый момент времени t из некоторого множества U.

Процесс происходит на конечном интервале времени $[t_0, T]$.

Целью кооперативного управления является перевод точки x_0 в некоторое состояние $x(T)$, при котором минимизируется расстояние до точек $M_1,...,M_k$, то есть задача заключается в нахождении минимума векторного критерия

$$[\rho(x(T),M_1),...,\rho(x(T),M_l),...,\rho(x(T),M_k)],$$

где $M_l \in R^n, \quad l=1,2,...,k$.

Математически задачу можно сформулировать так: найти такое управление $\bar{u}(t)$, которое переводит точку x_0 в $\bar{x}(T)$ в силу системы (1), наиболее близко расположенную к системе точек $M_1,...,M_k$.

Поскольку данная задача является задачей многокритериального оптимального управления, то в качестве принципа оптимальности естественно рассматривать множество оптимальных по Парето решений

Пусть, как и раньше множество $C(x_0, T-t_0)$ есть множество достижимости системы (1), и обозначим через $\Gamma(x_0, T-t_0)$ нашу задачу многокритериального оптимального управления, подчеркивая в этом обозначении зависимость от начального состояния x_0 и времени процесса $T-t_0$.

Обозначим через $\hat{M}$ выпуклую оболочку точек $M_1,\ldots,M_k$. Предположим для простоты, что

$$\hat{M} \cap C(x_0, T-t_0) = \varnothing.$$

Можно показать (при условии выпуклости множества (см. **[Петросян, Захаров, 1997])),** что множество оптимальных по Парето управлений в этой задаче состоит из программных управлений $\overline{u}(t)$, переводящих точку x_0 в некоторую точку M', принадлежащую проекции множества $\hat{M}$ на множество $C(x_0, T-t_0)$.

Обозначим через $\overline{x}(t)$ траекторию, соединяющую x_0 с некоторой точкой M', принадлежащей проекции $\hat{M}$ на $C(x_0, T - t_0)$, и пусть $\overline{u}(t)$ – соответствующее программное управление.

Траекторию $\overline{x}(t)$ назовем оптимальной траекторией. Понятно, что данная задача может иметь бесконечное число оптимальных траекторий, поскольку проекция множества $\hat{M}$ на множество $C(x_0, T - t_0)$, в общем случае, представляет собой замкнутое множество, содержащее более одной точки.

Рассмотрим некоторый промежуточный момент времени $\tau \in [t_0, T]$, и пусть мы пожелали в этот момент проверить: будет ли точка M' концом оптимальной по Парето траектории в подзадаче $\Gamma(\overline{x}(\tau), T - \tau)$ с начальным условием $\overline{x}(\tau)$ на оптимальной траектории и продолжительностью $T - \tau$?

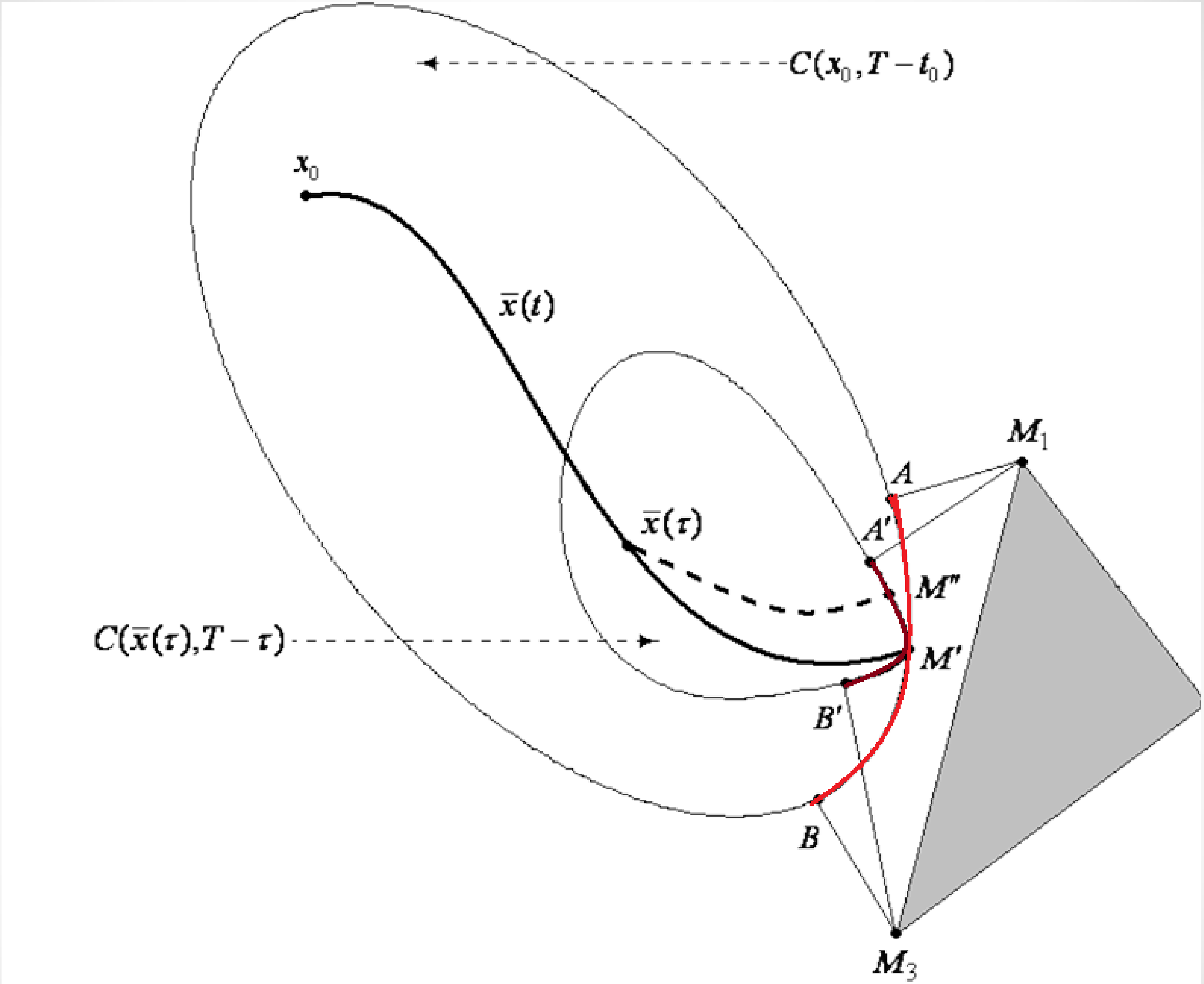


Рис. 2. Нарушение сильной динамической устойчивости Парето оптимального решения

Как и в задаче оптимального управления, ответ – положительный, то есть можно утверждать, что продолжение движения вдоль траектории $\overline{x}(t)$ при $t \geq \tau$ будет оптимальным движением в подзадаче $\Gamma(\overline{x}(\tau), T-\tau)$. Это и означает динамическую устойчивость или временную состоятельность оптимальной по Парето траектории $\overline{x}(t)$.

В то же время, как это видно из рис. 2, само Парето оптимальное множество программных управлений и соответствующие им траектории в подзадаче $\Gamma(\overline{x}(\tau), T-\tau)$, отличается от Парето оптимального множества в задаче $\Gamma(x_0, T-t_0)$, поскольку множество концов оптимальных по Парето траекторий в задаче $\Gamma(x_0, T-t_0)$ совпадает с дугой AB, а множество концов Парето оптимальных траекторий в задаче $\Gamma(\overline{x}(\tau), T-\tau)$ совпадает с дугой $A'B'$, которая является проекцией множества $\hat{M}$ на множество $C(\overline{x}(\tau), T-\tau)$.

В общем случае множества AB и $A'B'$ имеют одну общую точку M'. Поэтому мы видим, что в подзадаче $\Gamma(\overline{x}(\tau), T-\tau)$ возникают новые оптимальные по Парето траектории, переводящие точку $\overline{x}(\tau)$ в силу системы (1) в одну из точек M'' дуги $A'B'$, несовпадающей с точкой M'.

Рассмотрим следующее программное управление

$$\overline{\overline{u}}(t) = \begin{cases} \overline{u}(t), & t \in [t_0, \tau), \\ \tilde{u}(t), & t \in [\tau, T], \end{cases}$$

где $\tilde{u}(t)$ –оптимальное по Парето программное управление, переводящее точку $\overline{x}(\tau)$ в силу системы (1) в точку M'' на отрезке времени $[\tau, T]$.

Поскольку точка M'' не принадлежит дуге AB, программное управление $\overline{\overline{u}}(t)$ не является Парето оптимальным в первоначальной задаче $\Gamma(x_0, T-t_0)$.

Таким образом, мы приходим к выводу, что в задачах многокритериального управления не всякое оптимальное продолжение движения в подзадачах с начальными условиями на оптимальной траектории первоначально поставленной задачи $\Gamma(x_0, T - t_0)$ является Парето оптимальным в этой задаче. Это и означает нарушение *сильной динамической устойчивости или сильной состоятельности во времени* Парето оптимальных решений в задачах многокритериального управления.

При переходе от однокритериальных задач оптимального управления к многокритериальным задачам, мы сталкиваемся с потерей сильной динамической устойчивости принципов оптимальности.

Само по себе это обстоятельство уже делает весьма проблематичным реализацию на практике принципа оптимальности в подобных задачах, поскольку в промежуточные моменты времени возникает возможность пересмотра первоначально выбранного решения с заменой его на оптимальное в таком же смысле решение, однако общее развитие процесса при этом оказывается неоптимальным в первоначальном смысле. Данное обстоятельство порождает естественную неуверенность у лица, принимающего управленческое решение, в выполнении первоначально задуманных планов и проектов.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООПЕРАТИВНОГО РЕШЕНИЯ

Рассмотренные в предыдущем пункте задачи не относились к теории игр, хотя и в них мы уже наблюдаем некоторую динамическую неустойчивость. Но ситуация значительно ухудшается как речь идет о реализации долгосрочных соглашений о кооперации или о совместных действиях когда решение принимается несколькими сторонами (участниками) на продолжительном временном интервале. Прежде чем перейти к дальнейшему изложению необходимо вспомнить некоторые наиболее часто используемые принципы оптимальности теории игр.

Приведем самое общее определение игры.

Под игрой n лиц в нормальной форме понимается модель Γ вида:

$$\Gamma = \left\langle N, \left\{U^i\right\}_{i=1}^n, \left\{K_i\right\}_{i=1}^n \right\rangle,$$

где $N = \{1, \cdots, n\}$ – множество игроков, U^i – множество стратегий, $u_i \in U^i$ – стратегия, $K_i(u_1, \cdots, u_n)$ – функция выигрыша игрока $i \in N$.

Что же следует понимать под решением игры Γ?

Ответ на поставленный вопрос дают концепции (принципы) оптимальности, сформулированные в определениях. Во всех случаях понятно, что под решением следует понимать некоторый набор стратегий $(u_1,\cdots,u_n)$ всех игроков, удовлетворяющий требуемому свойству оптимальности. Наиболее распространенной концепцией оптимальности игры многих лиц является равновесие по Нэшу.

Определение 1. [Nash, 1951]. Набор стратегий $(\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_n)$ называется *равновесием по Нэшу*, если следующие неравенства выполняются для всех стратегий $u_i \in U^i$ и всех игроков $i \in N$:

$$K_i(\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_{i-1},\bar{u}_i,\bar{u}_{i+1},\cdots,\bar{u}_n) \geq K_i(\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_{i-1},u_i,\bar{u}_{i+1},\cdots,\bar{u}_n).$$

Равновесие по Нэшу (*NE – решение*) является кооперативным решением в широком смысле, поскольку выбор такого решения требует согласованного поведения игроков.

Действительно, NE – решение представляет собой набор стратегий, удовлетворяющий указанной системе неравенств. Поэтому игроки, по крайней мере, должны договориться, что они будут придерживаться именно такого способа поведения. Последнее обстоятельство особенно важно, если в игре имеется несколько NE – решений. В этом случае игроки должны договориться еще и какое равновесие они будут реализовывать.

Определение 2. Набор стратегий $(\tilde{u}_1,\cdots,\tilde{u}_n)$ называется *оптимальным по Парето,* если не существует другого набора стратегий $(u_1,\cdots,u_n)$, для которого следующие неравенства выполняются для всех $i \in N$:

$$K_i(u_1,\cdots,u_i,\cdots,u_n) \geq K_i(\tilde{u}_1,\cdots,\tilde{u}_i,\cdots,\tilde{u}_n)$$

и хотя бы для одного $j \in N$ оно выполняется строго:

$$K_j(u_1,\cdots,u_j,\cdots,u_n) > K_j(\tilde{u}_1,\cdots,\tilde{u}_j,\cdots,\tilde{u}_n).$$

Оптимальное по Парето решение (*PO – решение)* является кооперативным решением в широком смысле, поскольку принятие такого решения требует согласованного выбора стратегий всеми игроками и обладает свойством групповой рациональности при стратегическом поведении игроков. Концепция оптимальности по Парето справедлива как для игр с *трансферабельными*, так и для игр с *нетрансферабельными* выигрышами (такие выигрыши игроки не могут передавать друг другу).

Характерным представителем оптимального по Парето решения является *арбитражная схема Нэша*.

Определение 3. Арбитражная схема Нэша $(u_1',\cdots,u_n')$ является решением следующей оптимизационной задачи [Nash, 1950]:

$$\max_{u_1,\cdots,u_n}\prod_{i=1}^{n}\left[K_i(u_1,\cdots u_n)-K_i^0\right]=\prod_{i=1}^{n}\left[K_i(u_1',\cdots u_n')-K_i^0\right]$$

при ограничениях

$$K_i(u_1,\cdots u_n)\ge K_i^0,\ i\in N.$$

Здесь $(u_1^0,\cdots,u_n^0)$ - некоторое заданное «эталонное решение», определяющее точку «статус-кво» $K^0=(K_1^0,\cdots,K_i^0,\cdots,K_n^0)$, $K_i^0=K_i(u_1^0,\cdots u_n^0), i\in N$. Арбитражная схема Нэша (*NB – решение*) является кооперативным решением в широком смысле (частный случай Парето оптимального решения).

Арбитражная схема Нэша в динамике

Пусть задана управляемая система дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x \in R^m, \quad u \in U \subset R^l,$$

$$x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, T],$$

$H_i(x(T))$ выигрыш i игрока в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$.

$W(x_0, T - t_0; \{i\})$ - гарантированный выигрыш игрока i.

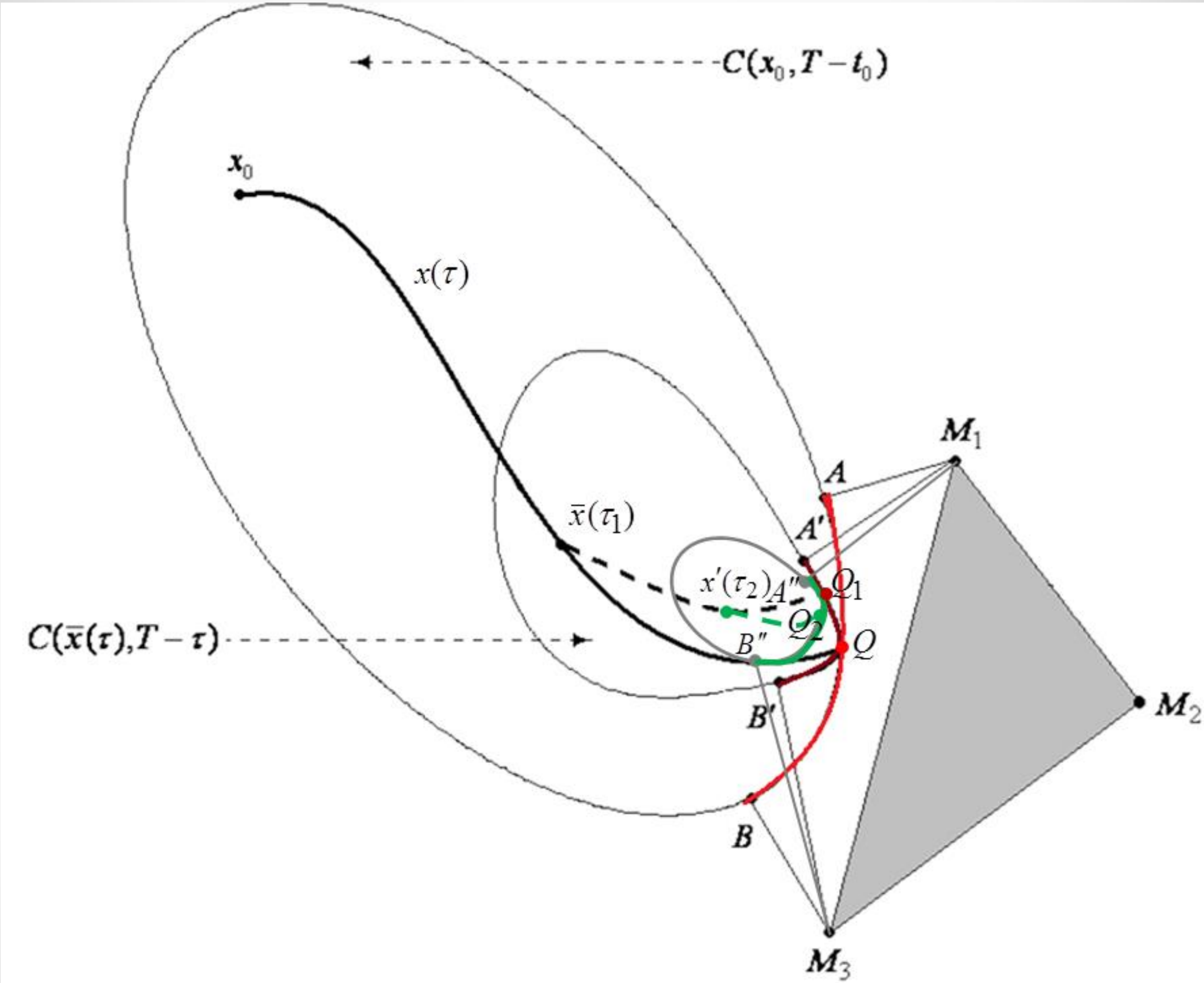
Для нахождения арбитражного решения Нэша для всей задачи надо найти точку максимизирующую выражение

$$\max_{x' \in C(x_0, T - t_0)} \prod_{i=1}^{n} (H_i(x') - W(x_0, T - t_0; \{i\})) = \prod_{i=1}^{n} (H_i(\bar{\bar{x}}) - W(x_0, T - t_0; \{i\}))$$

$\bar{\bar{x}}$, $x_0 \to \bar{\bar{x}}$, $\Gamma(\bar{x}(t), T - t)$, $t \in [t_0, T - t_0]$ $W(\bar{\bar{x}}(t), T - t; \{i\})$

$$\max_{x' \in C(\bar{x}(t), T - t)} \prod_{i=1}^{n} (H_i(x') - W(\bar{x}(t), T - t; \{i\})) = \prod_{i=1}^{n} (H_i(\bar{\bar{x}}(\bar{x}(t))) - W(\bar{x}(t), T - t; \{i\})$$

$$\bar{\bar{x}}(\bar{x}(t) \neq const \neq \bar{x}$$



$C(x_0, T-t_0)$
x_0
$x(\tau)$
$\bar{x}(\tau_1)$
$x'(\tau_2)$
A''
Q_1
Q_2
Q
$C(\bar{x}(\tau), T-\tau)$
B''
A
A'
M_1
M_2
B'
B
M_3

Рис. 3.

Рассмотрим теперь понятие кооперативного решения в узком смысле. Такая концепция кооперативного решения предполагает двойную кооперацию: по совместному выбору стратегий и дележу общего выигрыша от кооперации.

Напомним, что под *кооперативной игрой* в форме характеристической функции понимается модель Γ_v вида:

$$\Gamma_v = \langle N, v \rangle,$$

где $N = \{1, \cdots, n\}$ – множество игроков, $v(S) \geq 0,\ S \subset N,\ v(\varnothing) = 0$ - характеристическая функция, обладающая *свойством супераддитивности:*

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T),\ S \cap T = \varnothing.$$

Значение характеристической функции $v(S)$ часто интерпретируется как *максимальный гарантированный выигрыш коалиции* $S \subset N$. Из свойства супераддитивности характеристической функции следует, что $v(S) \geq v(S')$, для $S' \subset S \subseteq N$. Поэтому игрокам выгодно создавать максимальную коалицию N для получения максимально возможного суммарного выигрыша $v(N)$ в процессе игры.

Множество всевозможных распределений максимального суммарного выигрыша называется *множеством дележей*. Обозначим через ξ_i выигрыш игрока $i \in N$ при кооперации, если общий выигрыш от кооперации равен $v(N)$.

Вектор (распределение суммарного выигрыша) $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$,называется *дележом* в игре Γ_v, если выполняются условия:

$$\text{(i) } \xi_i \geq v(\{i\}),\ i \in N,$$

$$\text{(ii) } \sum_{i \in N} \xi_i = v(N).$$

В этом определении условие (i) определения гарантирует индивидуальную рациональность дележа в том смысле, что каждый игрок получает в условиях дележа, по меньшей мере, такой же выигрыш, который он или она получит, играя против всех остальных игроков. Условие (ii) гарантирует Парето оптимальность дележа, а поэтому и групповую рациональность.

Обозначим множество дележей в игре Γ_v через E_v. Под *кооперативным принципом оптимальности* W_v в игре Γ_v понимается правило, по которому каждой игре Γ_v ставится в соответствие некоторое подмножество $W_v \subset E_v$ из множества дележей, т.е. механизм распределения суммарного выигрыша от кооперации. Если принцип оптимальности W_v выбран, то дележ $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in W_v$ – называется *оптимальным* в соответствии с данным принципом оптимальности W_v. Это и есть *определение кооперативного решения в узком смысле*.

Приведем некоторые широко известные определения кооперативных решений.

<u>Определение 4.</u> Будем говорить, что дележ $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ принадлежит *ядру* игры Γ_v, если для каждой коалиции $S \subset N$ выполняется следующее условие:

$$\sum_{i \in S} \xi_i \geq v(S).$$

Множество всех дележей из ядра обозначается C_v. Смысл кооперативного решения из ядра понятен: если выбран в качестве оптимального дележ из ядра, то при таком дележе каждая коалиция получает не меньший выигрыш от кооперации, чем она может получить самостоятельно.

<u>Определение 5.</u> [Shapley, 1953]. Дележ

$$\Phi^v(x_0, T-t_0) = (\Phi_1^v, \cdots, \Phi_i^v, \cdots, \Phi_n^v)$$

называется вектором Шепли, если он определяется по формуле:

$$\Phi_i^v = \sum_{S \subset N (i \in S)} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} [v(S) - v(S \setminus i)], \; i = 1, \ldots, n.$$

3. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ КООПЕРАТИВНОГО ПРИНЦИПА ОПТИМАЛЬНОСТИ

Математически строго нами доказано, что практически все известные принципы оптимальности не являются состоятельными во времени, а поэтому их реализация связана с серьезными проблемами и, в конечном счете, с недостижением результатов кооперации в том смысле, как это предполагалось при принятии кооперативного решения.

3.1. Определение кооперативной дифференциальной игры.

Рассмотрим общую дифференциальную игру n лиц с уравнениями движения:

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)], \; x(t_0) = x_0 . \qquad (3)$$

Игра происходит на промежутке $[t_0, T]$.

Выигрыш игрока i определяется по формуле:

$$\int_{t_0}^{T} g^i[s, x(s), u_1(s), u_2(s), ..., u_n(s)]ds + q^i(x(T)), \quad g^i \geq 0, q^i \geq 0, \tag{4}$$

где $x(t) \in X \subset R^m$ - позиционная переменная игры, определяющая её текущее состояние, $u_i \in U^i$ – управляющее воздействие игрока $i \in N$. В рассматриваемом случае будем считать, что выигрыши игроков трансферабельные.

Мы предполагаем, что игроки перед началом игры приняли решение максимизировать суммарный выигрыш.

Пусть $\Gamma_c(x_0, T - t_0)$ – кооперативная игра, построенная на структуре игры $\Gamma(x_0, T - t_0)$, в которой игроки действуют в соответствии с некоторым заранее принятым принципом оптимальности.

Соглашение о том, как именно осуществлять кооперацию и разделить полученный в результате кооперативный выигрыш и составляет принцип оптимальности решения кооперативной схемы.

Принцип оптимальности решения должен оставаться действенным на всем периоде кооперации. Кроме того, принцип групповой рациональности требует, чтобы игроки выбирали кооперативные стратегии (управления) из Парето оптимального множества.

В дополнение к этому, принцип распределения полученного суммарного выигрыша должен быть индивидуально-рациональным в том смысле, что в результате кооперации ни один из игроков не получил бы меньше, чем без кооперации.

3.2. Динамика дележей в кооперативной игре

В динамических и дифференциальных играх дележи, входящие в решение, естественным образом находятся в поле зрения игроков при их движении вдоль оптимальной траектории $\{x_s^*\}_{s=t_0}^{T}$. В этом разделе мы обратим основное внимание на динамику распределения дележа, обусловленного выбранным принципом оптимальности.

Итак, пусть в игре $\Gamma_v(x_0, T-t_0)$ выбран некоторый принцип оптимальности решения $W_v(x_0, T-t_0)$. Решение игры строится в начальном состоянии $x(t_0)=x_0$ на основе данного принципа оптимальности и представляет собой некоторое подмножество множества дележей $W_v(x_0, T-t_0) \subseteq E_v(x_0, T-t_0)$, а также условно-оптимальную траекторию $\{x_s^*\}_{s=t_0}^{T}$, максимизирующую суммарный выигрыш:

$$\sum_{j=1}^{N} \left\{ \int_{t_0}^{T} g^j[s, x^*(s), u^*(s)]ds + q^j(x^*(T)) \right\}$$

Определение 6. Любая траектория $\{x_s^*\}_{s=t_0}^T$ являющаяся решением системы (3) и такая, что

$$\sum_{j=1}^{N}\left\{\int_{t_0}^{T} g^j[s,x^*(s),u^*(s)]ds+q^j(x^*(T))\right\}=v(N;x_0,T-t_0)$$

называется *условно-оптимальной траекторией* в игре $\Gamma_v(x_0,T-t_0)$.

Из определения 6 следует, что вдоль условно-оптимальной траектории игроки получают максимальный суммарный выигрыш. Рассмотрим поведение множества $W_v(x_0,T-t_0)$ вдоль условно-оптимальной траектории $\{x_s^*\}_{s=t_0}^T$. Для каждого текущего состояния $x^*(t)=x_t^*$ определяем текущую подыгру $\Gamma_v(x_t^*,T-t)$ с характеристической функцией $v(N;x_t^*,T-t)$ и множеством дележей $E_v(x_t^*,T-t)$.

Рассмотрим семейство текущих игр $\{\Gamma_v(x_t^*,T-t),\, t_0\le t\le T\}$, и их решения $W_v(x_t^*,T-t)\subset E_v(x_t^*,T-t)$, порожденные тем же принципом оптимальности, что и решения $W_v(x_0,T-t_0)$.

3.3. Динамически устойчивое (состоятельное во времени) кооперативное решение

Пусть существуют решения $W_v(x_t^*, T-t) \neq \varnothing$, $t_0 \le t \le T$ вдоль оптимальной траектории $\{x_s^*\}_{s=t_0}^{T}$. Предположим, что в момент времени t_0 в состоянии x_0 игроки согласились на дележ

$$\xi(x_0, T-t_0) = [\xi_1(x_0, T-t_0), \xi_2(x_0, T-t_0), \dots, \xi_n(x_0, T-t_0)]$$

Это означает, что игроки согласились на такой дележ суммарного выигрыша, при котором доля игрока i на отрезке времени $[t_0, T]$ в точности равна $\xi_i(x_0, T-t_0)$. Если, в соответствии с дележом $\xi(x_0, T-t_0)$, игрок i предполагает получить выигрыш равный $\omega_i[\xi(x_0, T-t_0); x^*(\cdot), t-t_0]$ на временном интервале $[t_0, t]$, то на оставшемся интервале $[t, T]$ его выигрыш должен быть равен:

$$\eta_i[\xi(x_0, T-t_0); x^*(t), T-t] = \xi_i(x_0, T-t_0) - \omega_i[\xi(x_0, T-t_0); x^*(\cdot), t-t_0] \quad (7)$$

Для того чтобы первоначальное соглашение о дележе (а именно о дележе $\xi(x_0, T-t_0)$) сохранялось в силе в момент t, существенно, чтобы вектор $\eta[\xi(x_0,T-t_0); x^*(t), T-t] \in W_v(x_t^*, T-t)$, (8)

то есть $\eta[\xi(x_0,T-t_0); x^*(t), T-t]$ должен быть действительно решением текущей игры $\Gamma_v(x_t^*, T-t)$. Если указанное условие выполняется в каждый момент времени $t \in [t_0, T]$ вдоль оптимальной траектории $\{x_s^*\}_{s=t_0}^{T}$, тогда дележ $\xi(x_0, T-t_0)$ динамически устойчив.

Динамическая устойчивость или состоятельность во времени решения $\xi(x_0, T-t_0)$ гарантирует, что продолжение решения в подыграх, начинающихся на оптимальной траектории, должно оставаться оптимальным. Кроме того, групповая и индивидуальная рациональность должна выполняться на всем временном интервале.

Как мы уже говорили, все основные кооперативные принципы оптимальности в узком смысле являются динамически неустойчивыми (несостоятельными во времени). Однако выход из положения есть. Необходимо специальным образом определить механизм выплат, который бы обеспечил устойчивую реализацию таких дележей.

3.4. Процедура распределения дележа

Процедура распределения дележа, впервые предложенная в **[Петросян, Данилов, 1979]**, будет построена таким образом, чтобы динамическая устойчивость дележей могла быть реализована для конкретного кооперативного решения. Представим выигрыш игрока i, получаемый им на временном интервале $[t_0, t]$, в виде:

$$\omega_i[\xi(x_0(\cdot), T - t_0); x^*(\cdot), t - t_0] = \int_{t_0}^{t} B_i(s)ds, \quad (9)$$

где $\sum_{j \in N} B_j(s) = \sum_{j \in N} g^j[s, x^*(s), u^*(s)]$,

при $t_0 \le s \le t \le T$ и $\eta_i[\xi(x_0, T - t_0); x^*(t), T - t] + \omega_i = \xi_i(x, T - t_0)$.

Отсюда получаем

$$B_i(t) = -\frac{d\eta_i}{dt} \text{ или } \frac{d\omega_i}{dt} = B_i(t), \quad (10)$$

где $\eta \in W_v(x_t^*, T - t)$.

Величина $B_i(t)$ может быть проинтерпретирована как мгновенный выигрыш игрока i в момент t. Очевидно, что вектор $B(t)=[B_1(t), B_2(t),\dots,B_n(t)]$ предписывает распределение суммарного выигрыша между членами коалиции N. Выбирая $B(t), t\in[t_0,T]$ игроки могут гарантировать желаемый исход, а именно, в каждый момент $t\in[t_0,T]$ у них не будет оснований против реализации первоначального дележа $\xi(x_0,T-t_0)$ как показано на рис. 4, т.е. дележ $\xi(x_0,T-t_0)$ динамически устойчив.

Кооперативная дифференциальная игра $\Gamma_v(x_0,T-t_0)$ имеет динамически устойчивое решение $W_v(x_0,T-t_0)$, если все его дележи $\xi(x_0,T-t_0)\in W_v(x_0,T-t_0)$ динамически устойчивые. Условно-оптимальная траектория, вдоль которой существует динамически-устойчивое решение игры $\Gamma_v(x_0,T-t_0)$, называется *оптимальной траекторией.*

Нами при достаточно общих предположениях доказано, что процедура выбора $B(t), t\in[t_0,T]$ (*процедура распределения дележа*), приводящая к динамически устойчивому кооперативному решению существует и реализуема.

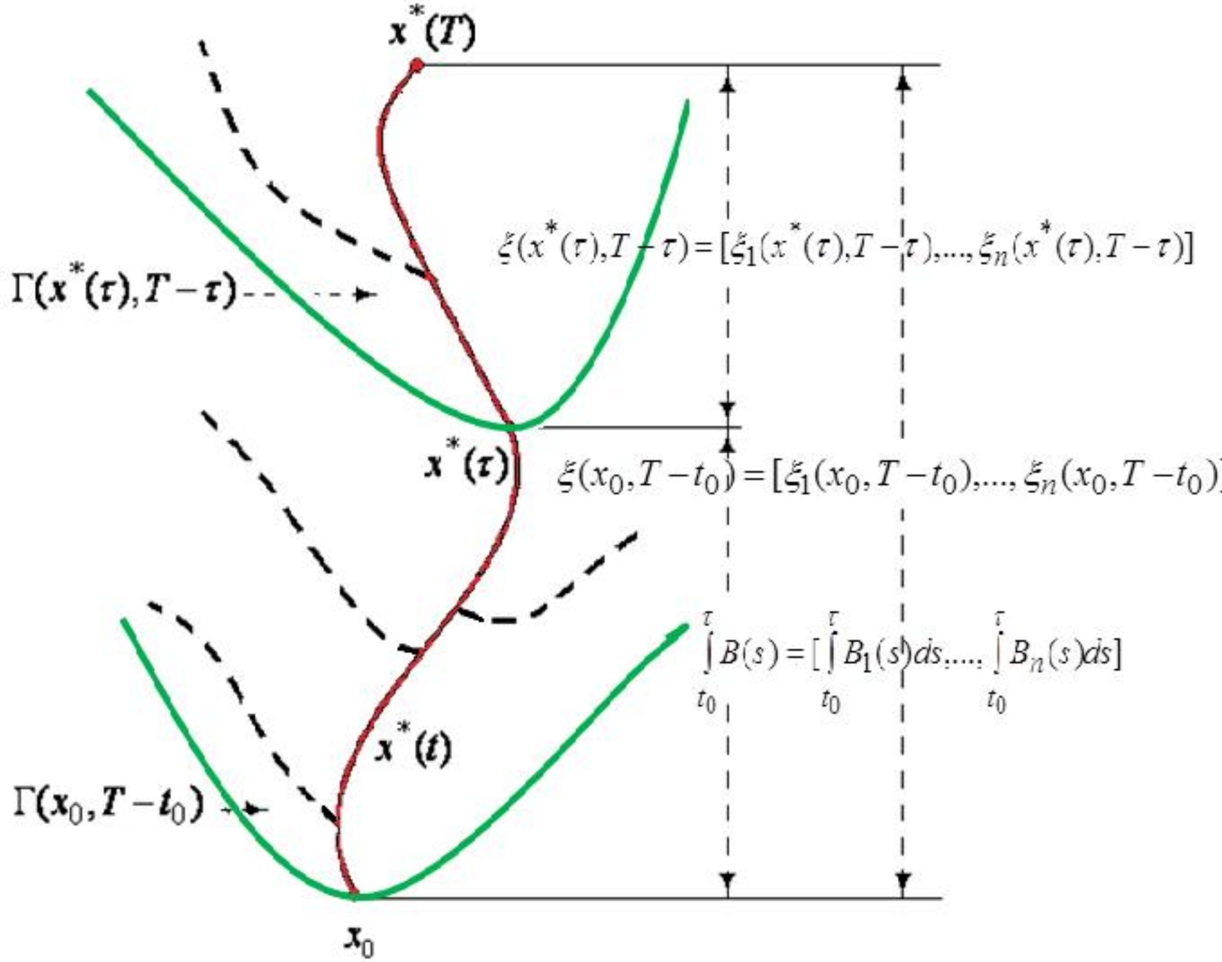
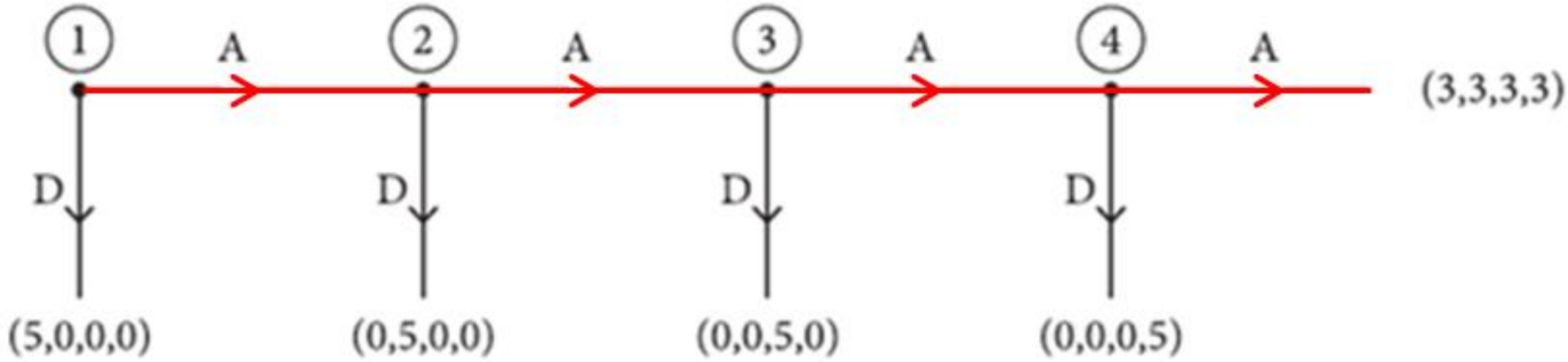


Рис. 4. Динамически устойчивое кооперативное решение

Пример

Γ_1



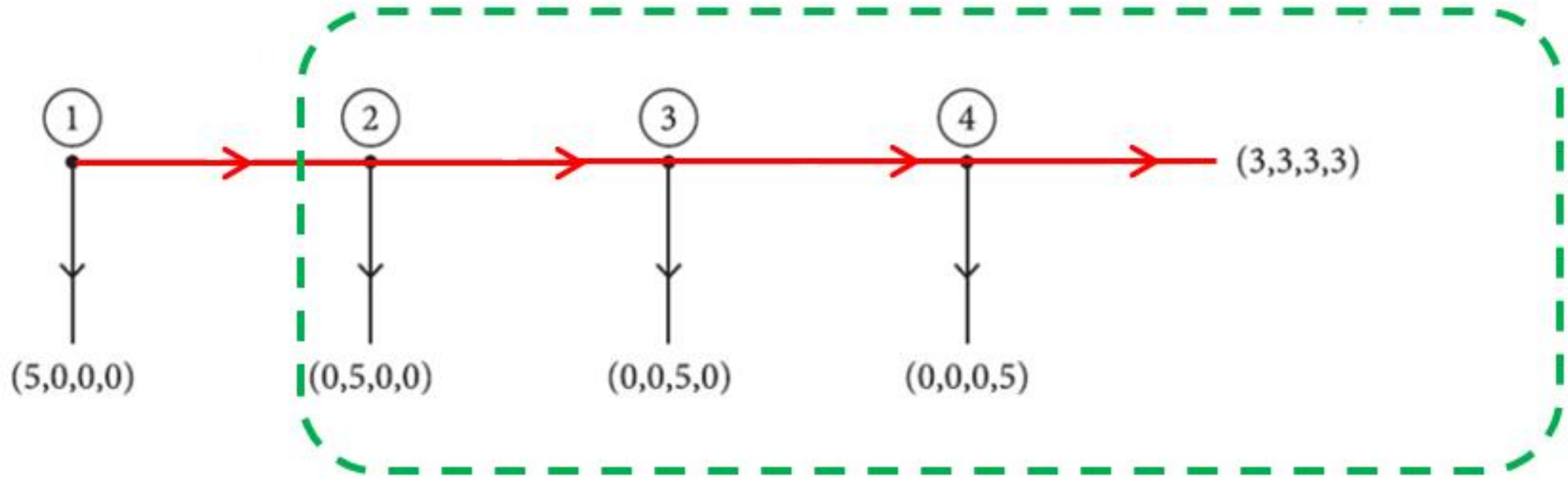
(D, D, D, D) – NE, (A, A, A, A) – не NE

Характеристическая функция игры Γ_1:

$v_1(1,2,3,4) = 12$, $v_1(1,2,3) = 5$, $v_1(1,3,4) = 5$, $v_1(2,3,4) = 0$, $v_1(1,2,4) = 5$, $v_1(1,2) = 5$, $v_1(1,3) = 5$, $v_1(1,4) = 5$, $v_1(2,3) = 0$, $v_1(2,4) = 0$, $v_1(3,4) = 0$, $v_1(1) = 5$, $v_1(2) = 0$, $v_1(3) = 0$, $v_1(4) = 0$.

$Sh^1 = (\frac{27}{4}, \frac{7}{4}, \frac{7}{4}, \frac{7}{4})$

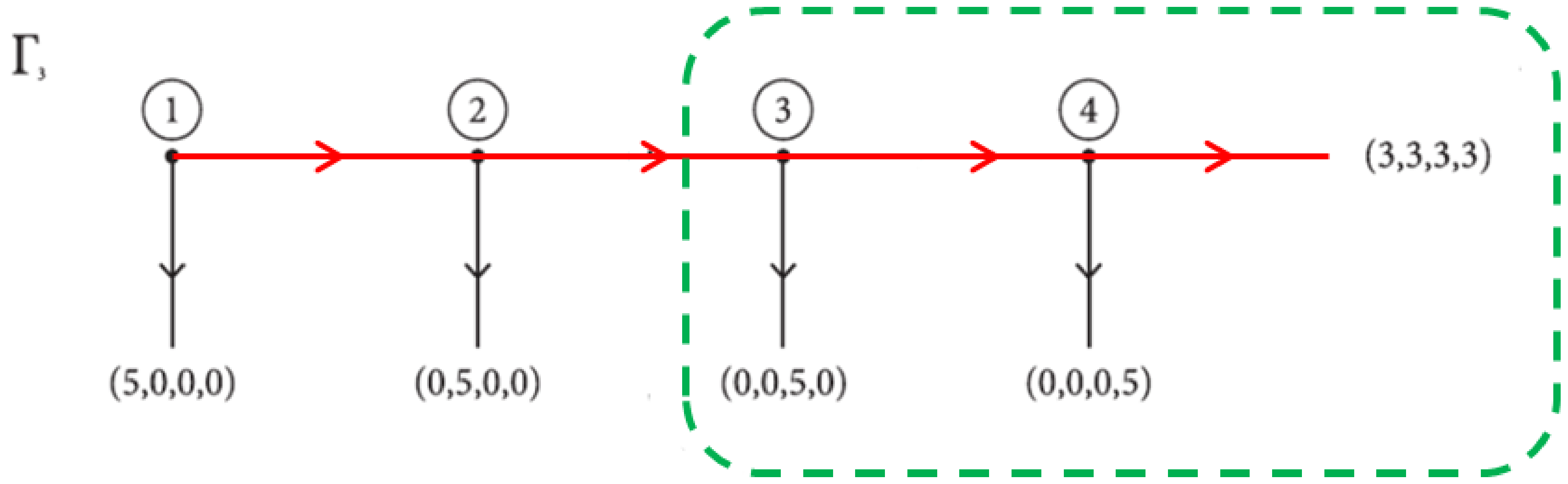
Γ_2



Характеристическая функция игры Γ_2:

$v_2(1,2,3,4) = 12,\ v_2(1,2,3) = 5,\ v_2(1,3,4) = 5,\ v_2(2,3,4) = 9,$
$v_2(1,2) = 5,\ v_2(1,3) = 0,\ v_2(1,4) = 0,\ v_2(2,3) = 5,\ v_2(2,4) = 5,\ v_2(3,4) = 0,$
$v_2(1) = 0,\ v_2(2) = 5,\ v_2(3) = 0,\ v_2(4) = 0.$

$$Sh^2 = \left(\frac{19}{12}, \frac{65}{12}, \frac{30}{12}, \frac{30}{12}\right)$$

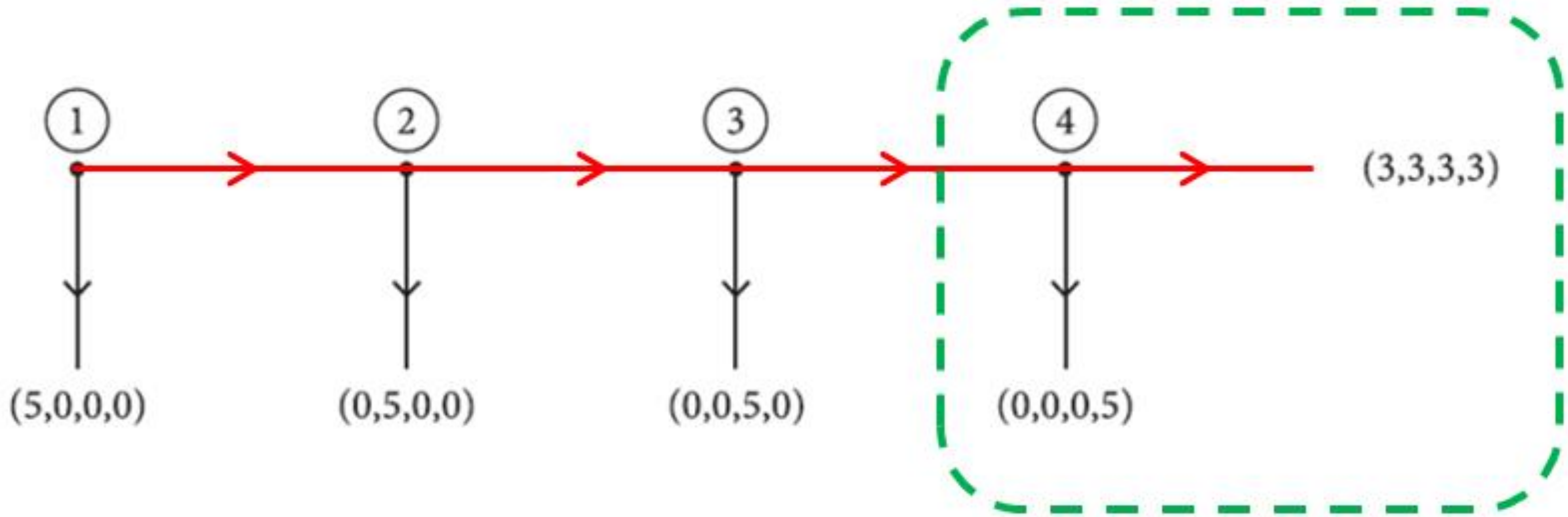


Характеристическая функция игры Γ_3:

$v_3(1,2,3,4)=12,\ v_3(1,2,3)=5,\ v_3(1,3,4)=9,\ v_3(2,3,4)=9,\ v_3(1,2,4)=0$
$v_3(1,2)=0,\ v_3(1,3)=5,\ v_3(1,4)=0,\ v_3(2,3)=5,\ v_3(2,4)=0,\ v_3(3,4)=6,$
$v_3(1)=0,\ v_3(2)=0,\ v_3(3)=5,\ v_3(4)=0.$

$Sh^3=\left(1,1,\frac{90}{12},\frac{30}{12}\right)$

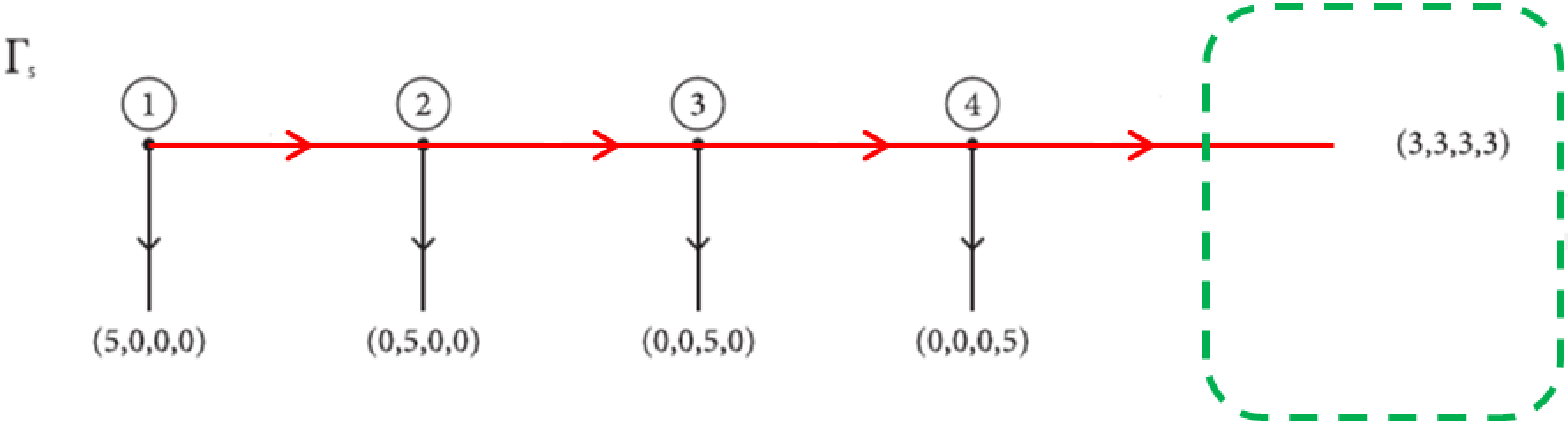
Γ_4



Характеристическая функция игры Γ_4:

$v_4(1,2,3,4) = 12,\ v_4(1,2,3) = 0,\ v_4(1,3,4) = 9,\ v_4(2,3,4) = 9,\ v_4(1,2,4) = 9$
$v_4(1,2) = 0,\ v_4(1,3) = 0,\ v_4(1,4) = 5,\ v_4(2,3) = 0,\ v_4(2,4) = 5,\ v_4(3,4) = 5,$
$v_4(1) = 0,\ v_4(2) = 0,\ v_4(3) = 0,\ v_4(4) = 5.$

$$Sh^4 = \left(\tfrac{17}{12}, \tfrac{17}{12}, \tfrac{17}{12}, \tfrac{93}{12}\right)$$



Характеристическая функция игры Γ_5:

$$v_5(1,2,3,4) = 12,\ v_5(1,2,3) = v_5(1,3,4) = v_5(2,3,4) = v_5(1,2,4) = 9$$
$$v_5(1,2) = v_5(1,3) = v_5(1,4) = v_5(2,3) = v_5(2,4) = v_5(3,4) = 6,$$
$$v_5(1) = v_5(2) = v_5(3) = v_5(4) = 3.$$

$$Sh^5 = (3,3,3,3)$$

Процедура распределения дележа

$\beta_k, k = 1, \ldots, 5$

$Sh^1 = \beta_1 + Sh^2, Sh^2 = \beta_2 + Sh^3, \ldots, Sh^4 = \beta_4 + Sh^5$

$\beta_1 = (Sh^1 - Sh^2), \beta_2 = (Sh^2 - Sh^3), \beta_3 = (Sh^3 - Sh^4), \beta_4 = (Sh^4 - Sh^5), \beta_5 = Sh^5$

$\sum_{k=1}^5 \beta_k = Sh^1, \sum_{k=2}^5 \beta_k = Sh^2, \sum_{k=3}^5 \beta_k = Sh^3,$
$\sum_{k=4}^5 \beta_k = Sh^4, \sum_{k=5}^5 \beta_k = Sh^5$

$\beta_1 = (\frac{62}{12}, -\frac{44}{12}, -\frac{9}{12}, -\frac{9}{12})$

$\beta_2 = (\frac{7}{12}, \frac{53}{12}, -\frac{60}{12}, 0)$

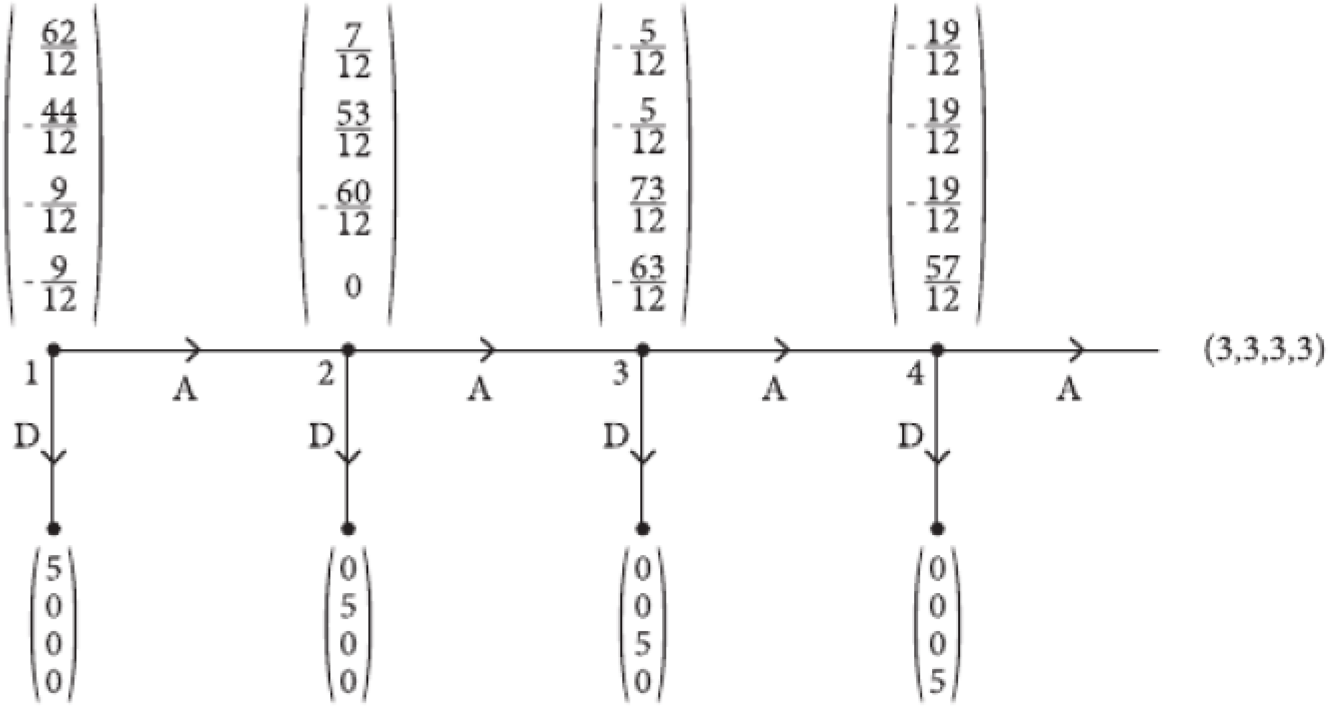
$\beta_3 = (-\frac{5}{12}, -\frac{5}{12}, \frac{73}{12}, -\frac{63}{12})$

$\beta_4 = (-\frac{19}{12}, -\frac{19}{12}, -\frac{19}{12}, \frac{57}{12})$

$\beta_5 = (3, 3, 3, 3)$

Кооперация, стратегически поддержанная равновесием по Н

Игра $\overline{\Gamma}$



(A, A, A, A) – NE

$$NE \begin{cases} \frac{62}{12} + \frac{7}{12} - \frac{5}{12} - \frac{19}{12} + 3 > 5 \\ \frac{53}{12} - \frac{5}{12} - \frac{19}{12} + 3 > 5 \\ \frac{73}{12} - \frac{19}{12} + 3 > 5 \\ \frac{57}{12} + 3 > 5 \end{cases}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы исследовали долгосрочные кооперативные решения в широком смысле (основанные на согласовании интересов) и узком смысле (требующие стратегической кооперации по максимизации суммарного выигрыша и механизма распределения этого выигрыша).

Нами показано, что основные кооперативные принципы оптимальности не обладают свойством динамической устойчивости (временной состоятельности), требующим сохранения свойства оптимальности на промежутке его реализации вдоль оптимальной траектории. Нами предложен метод регуляризации (ПРД), основанный на введении нового управления на оптимальной траектории. Результатом применения этого метода в конкретной задаче динамической кооперации является построение управления в виде функции специальных выплат, реализуемого на оптимальной траектории. Таким образом, мы получаем двухэтапную задачу: принятия кооперативного решения в рамках выбранного принципа оптимальности и построение управления для данного кооперативного решения на основе применения ПРД. Кооперативное решение, полученное в результате решения этой двухэтапной задачи, будет обладать свойством динамической устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

Красовский, Н.Н. 1967. *К задаче об игровой встрече движений*. Докл. АН СССР, т. 27, №2

Петросян, Л. А. 1965. Дифференциальные игры на выживание со многими участниками. *Докл. АН СССР*, т.161, № 2, с. 285-287.

Петросян, Л. А. 1977. “Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками”, *Вестник Ленинградского университета*, № 19, с. 46-52.

Петросян, Л. А. 1978. “Неантагонистические дифференциальные игры”, в кн.: Вопросы механики процессов управления. Управление динамическими системами. Л. с. 173-181

Петросян Л.А., Данилов Н.Н. 1979 “Устойчивость решений в неантагонистических дифференциальных играх с трансферабельными выигрышами”, *Вестник Ленинградского университета*, №1, с. 52-59

Петросян Л.А., Данилов Н.Н. 1985. *Кооперативные дифференциальные игры и их приложения*. Томск: Изд-во Томск. ун-та – 260 с.

Петросян, Л. А., Мурзов Н.В. 1967. “Игры на перетягивание со многими участниками”, *Вестник Ленинградского университета*, № 13, с. 125-129.

Петросян, Л.А., Захаров, В.В. 1997. *Математические модели в экологии*, СПб.: Изд-во С.-Петерб. Ун-та., 250 с.

Понтрягин Л. С. 1966. К теории дифференциальных игр. *УМН*, 21, №46, с. 219-274.

Bellman, R. *Dynamic programming*. 1957. Princeton University Press, Princeton, New Jersey – 220 p. (Русский перевод: Беллман Р. *Динамическое программирование*, 1960, ИЛ)

Case, J.H. 1967. Equilibrium points of n-person differential games. Ph. D. Thesis, University pf Michigan, Ann Arbor, MI, Department of Industrial Engineering, Tech. Report No. 1967-1

Haurie, A. 1976. “A note on nonzero-sum differential games with bargaining solutions”, *Journal of optimization theory and application*, Vol. 18, pp. 31-39.

Isaacs, R. *Differential Games*. 1965. Wiley, New York. (Русский перевод: Айзекс, Р. *Дифференциальные игры*, 1967, М.: МИР – 480 с.)

Jorgensen, S., Zaccour, G. 2001. “Time consistent side payment in a dynamic game in downstream pollution”, *Journal of economic dynamics and control*, Vol. 25, pp. 1973-1987.

Jorgensen, S., Zaccour, G. 2002. “Time consistency in cooperative differential games”, In: Zacour, Georges (ed) Decision and control in management sciences: essays in honor of Alan Haurie. Kluwer Science Publisher, London, pp. 349-366.

Kaitala, V. 1993. “Equilibria in a stochastic resource management game under imperfect information”, *European Journal of Operational Research*, Vol. 71, pp. 439-453.

Kalai, E., Smorodinskiy, M. 1975. “Other solutions to Nash’s bargaining problem”, *Econometrica*, Vol. 43, pp. 513-518.

Kydland, F.E., Prescott E.C. 1977. “Rules rather than discretion: the inconsistency of optimal plans”, *Journal of political economy*, Vol. 85, pp. 473-490

Nash, J.F. 1950. “The bargaining problem”, *Econometrica*, Vol. 18, № 2, pp. 155-162.

Nash, J.F., 1951. “Non-cooperative games”, *Ann. Math.*, Vol. 54, N2, pp. 286-295.

Neumann, J. von, Morgenstern, O. *Theory of games and economic behavior*. 1944. Princeton, Princeton University Press – 625 p. (Русский перевод: Нейман, Дж., Моргенштерн, О. *Теория игр и экономическое поведение*, 1970. М.: Наука – 708 с.)

Shapley, L.S. 1953. “A value for n-person games”, In Contributions to the Theory of Games, Princeton, Princeton University Press II, pp. 307-317.

Petrosjan, L.A. 1993. *Differential games of pursuit*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Singapore – 302 p.

Petrosjan, L.A. 2003. “Bargaining in dynamic games.” In: Petrosjan, L., Yeung, D. (ed) ICM Millennium Lectures on Games. Springer-Verlag, Berlin, 139-143 p.

Petrosjan, L., Zaccour, G. 2003. “Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction”, *Journal of economic dynamics and control*, Vol. 27, No. 3, pp. 381-398.

Petrosjan, L.A., 2016 *Game Theory*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Singapore – 490p. (совместно с Н.А.Зенкевичем)

Petrosjan L.A., Subgame Consistent Economic Optimization, Springer, 2012, 396p. (совместно с Д.В.К. Янг)

Petrosyan L.A. *Cooperative stochastic differential games*. 2006. Springer – 242 p. (совместно с Д.В.К Янг)

Petrosyan L.A. *Subgame Consistent Cooperation.* 2016. Springer – 521p. (совместно с Д.В.К Янг)

ПРИЛОЖЕНИЯ

- Applications in Cooperative Public Goods Provision
- Collaborative Environmental Management
- Cooperation with Technology Switching
- Applications in Business Collaboration

Спасибо!